RECHERCHE OPERATIONNELLE

THEORIES DES FILES D'ATTENTE

http://www.crefima.net

INTRODUCTION

- L’objectif de l’analyse des files d’attente est de pouvoir optimiser la conception des systèmes de service.
- On optimisera par exemple
  - Le profit.
  - Le niveau de service.

Introduction

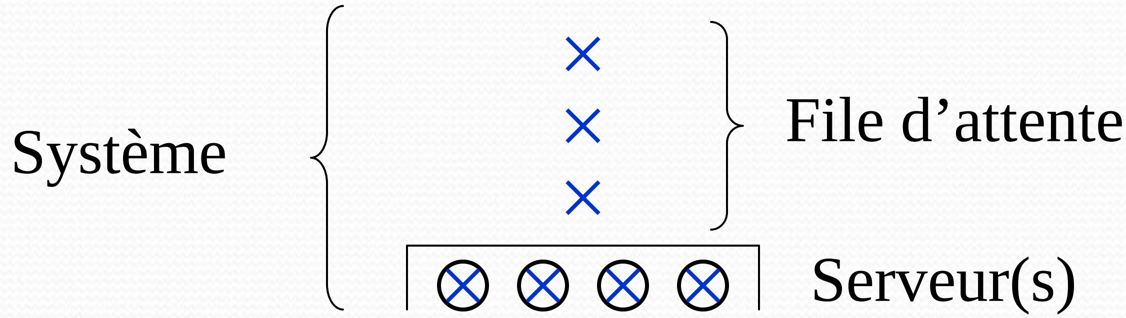
- L’analyse d’un système de file d’attente nécessite de bien comprendre les mesures de niveau de service.
- Les mesures les plus communes de niveau de service
  - Temps moyen d’attente d’un client dans la file.
  - Longueur moyenne de la file.
  - Probabilité pour un client de devoir attendre avant d’être servi.

Eléments d'une file d'attente

Système de file d'attente de base

× : client

○ : serveur



3 clients dans la file

4 clients en train d'être servis

7 clients dans le système

http://www.crefima.net

Eléments d'une file d'attente

- Les caractéristiques d'une file d'attente seront déterminées par 4 éléments :
  - Les arrivées : les clients arrivent suivant un certain processus d'arrivée.
  - La/les files : organisation de la/les files (priorité, file simple/multiple, ...)
  - Service : distribution des temps de service des clients.
  - Serveurs : nombre de serveurs actifs.

Le processus d'arrivée

- Deux types de processus d’arrivée sont possibles
  - Un processus déterministe (arrivées planifiées).
  - Un processus aléatoire (arrivées non planifiées).

http://www.crefima.net

Le processus d'arrivée

- Pour des arrivées aléatoires, le processus le plus souvent utilisé est le processus de Poisson.
- Les arrivées suivront un processus de Poisson si
  - Les clients arrivent ***un par un***.
  - Les arrivées sont ***indépendantes***.
  - Le processus est ***stationnaire***, c-à-d la probabilité d’un certain nombre d’arrivées durant deux intervalles de même longueur est identique.

http://www.crefima.net

Le processus de Poisson

Lisez : Probabilité d'avoir k arrivées sur une durée t

$$P[N(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Avec

λ = taux d'arrivée moyen (arrivée/unité de temps).

N(t) = nombre d'arrivées durant un intervalle de temps de longueur t.

e = 2.7182818 (une constante).

k! = k (k -1) (k -2) (k -3) … (3) (2) (1).

http://www.crefima.net

Processus d'arrivée

- Les clients arrivent à ASSOCIATED BANK suivant un processus de Poisson.
- Entre 8h et 9h il y a en moyenne 6 clients qui viennent à la banque.
- Quelle est la probabilité que k clients arrivent entre 8h et 8h30 (k = 0, 1, 2,…)?

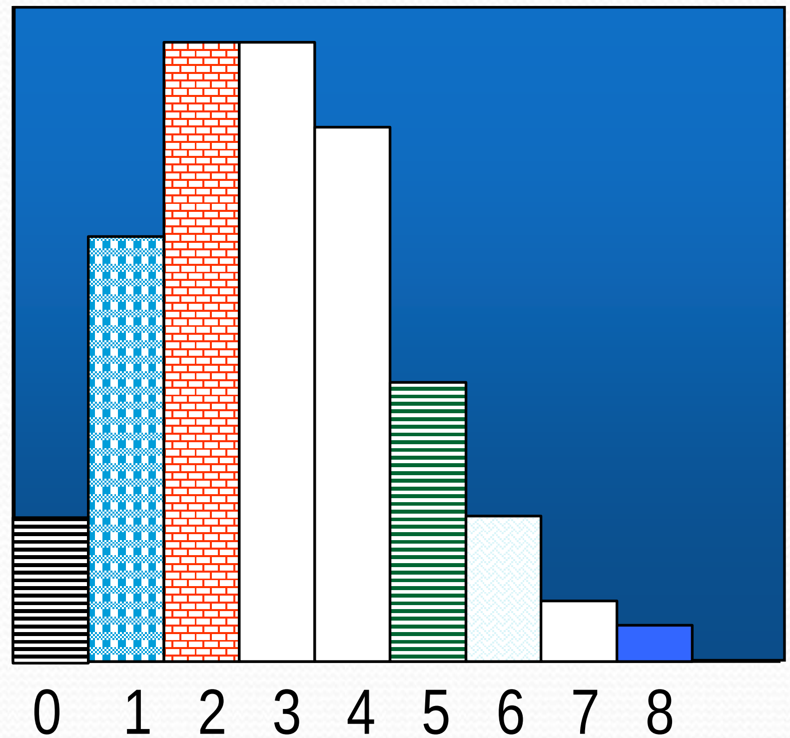
Illustration du processus de Poisson.

- Paramètres de la distribution de Poisson

λ = 6 clients par heure.

t = 0,5 heure.

λt = (6)(0,5) = 3.



$$P(X = 3) = \frac{(\lambda t)^{3} e^{-\lambda t}}{3!} = 0.224042$$

http://www.crefima.net

- Le taux d'entrée λ et l'intervalle de temps t doivent être sur la base d'une même unité temporelle.
- Si λ est défini en heure, t doit être défini en heure.
- Si λ est défini en minute, t doit être défini en minute.

Caractéristiques d’une file d’attente

- Facteurs influençant le modèle de file d’attente
  - Configuration (nbre serveurs, files)
  - Changement de files
  - Renoncement
  - Homogénéité
  - Règles de priorité
  - Files en série

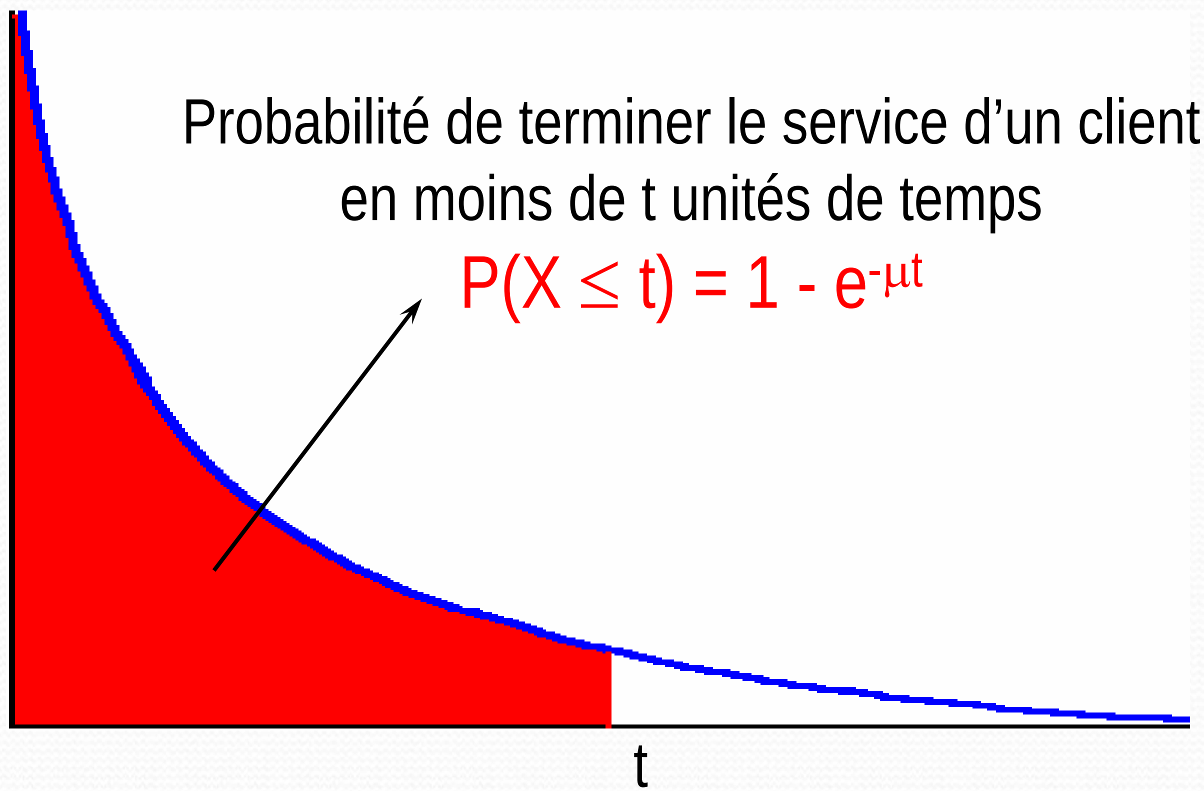
Le service

- En général le temps de service variera d'un client à l'autre.
- Quand le temps de service n'est pas constant on le représentera par une variable aléatoire.
  - La distribution exponentielle est particulièrement simple à utiliser et est de ce fait souvent utilisée.

http://www.crefima.net

Illustration de la distribution exponentielle de probabilité

$f(t) = \mu e^{-\mu t}$



http://www.crefima.net

ASSOCIATED BANK

Temps de service

- Le temps moyen de service pour un client est 4 minutes.
- Les temps de services suivent une distribution exponentielle.
- Quelle est la probabilité qu'un client soit servi en moins de 3 minutes?

$1/4 = \mu$

$P(X \leq t) = 1 - e^{-(1/4)*3} = 0.53$

Le temps moyen de service peut être ramené à un niveau inférieur à 3 minutes

Mesures de performance pour un système de file d'attente

Afin d'atteindre un régime stationnaire, le taux d'arrivée doit être inférieur au taux total de service .

k serveurs

$\lambda < \mu$ Pour un serveur unique	$\lambda < \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\kappa$ Pour k serveurs avec taux de services μ_ι	$\lambda < k\mu$ k serveurs identiques avec un taux de service μ

http://www.crefima.net

Mesures de performance en régime stationnaire

- P_0 = Probabilité qu'il n'y ait pas de client dans le système.
- P_n = Probabilité qu'il y ait n clients dans le système.
- L = Nombre moyen de clients dans le système.
- L_q = Nombre moyen de clients dans la file d'attente.
- W = Temps moyen passé par un client dans le système.
- W_q = Temps moyen passé par un client dans la file d'attente.
- P_w = Probabilité pour un client de devoir attendre avant d'être servi.
- ρ = Taux d'utilisation des serveurs (fraction du temps où ils sont occupés).

Formule de Little

- La formule de Little établit une relation entre L, L_q, W, et W_q.
- La formule est applicable pour tout système de file d'attente tel que :
  - il y a une seule file d'attente,
  - les clients arrivent avec un taux λ,
  - le système est en régime stationnaire.

$$L = \lambda W \qquad L_q = \lambda W_q \qquad L = L_q + \lambda/\mu$$

http://www.crefima.net

File M / M /1 – Mesures de performance

$$P_0 = 1 - (\lambda/\mu)$$

$$P_n = [1 - (\lambda/\mu)](\lambda/\mu)^n$$

$$L = \lambda /(\mu - \lambda)$$

$$L_q = \lambda^2 /[\mu(\mu - \lambda)]$$

$$W = 1 /(\mu - \lambda)$$

$$W_q = \lambda /[\mu(\mu - \lambda)]$$

$$P_w = \lambda / \mu$$

$$\rho = \lambda / \mu$$

La probabilité pour un client d'attendre dans le système plus que "t" est $P(X>t) = e^{-(\mu - \lambda)t}$

http://www.crefima.net

MARY's SHOES

- Les clients arrivent au magasin Mary's Shoes toutes les 12 minutes en moyenne, suivant un processus de Poisson.

- Le temps de service est distribué exponentiellement avec une moyenne de 8 minutes par client.

MARY's SHOES - **Solution**

- Données

  $\lambda = 1/12$ clients par minute $= 60/12 = 5$ par heure.

  $\mu = 1/8$ clients par minute $= 60/8 = 7.5$ par heure.

- Calcul des indices de performance

$\mu - \lambda = 7.5 - 5 = 2.5$ par heure.

$P(X<10\text{min}) = 1 - e^{-2.5(10/60)} = .565$

$P_w = \lambda/\mu = 0.6667$

$\rho = \lambda/\mu = 0.6667$

$P_0 = 1 - (\lambda/\mu) = 1 - (5/7.5) = 0.3333$

$P_n = [1 - (\lambda/\mu)](\lambda/\mu)^n = (0.3333)(0.6667)^n$

$L = \lambda/(\mu - \lambda) = 2$

$L_q = \lambda^2/[\mu(\mu - \lambda)] = 1.3333$

$W = 1/(\mu - \lambda) = 0.4$ heures $= 24$ minutes

$W_q = \lambda/[\mu(\mu - \lambda)] = 0.26667$ heures $= 16$ minutes

http://www.crefima.net